

## 正交面齿轮传动的两类界线

赵亚平, 娄海青

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘要:**为了建立系统的正交面齿轮传动啮合界线与曲率干涉界线理论, 本文通过求解非线性方程组获得了两类界线的数值解。证明了啮合界线在小轮齿面上是渐开线; 其共轭线也是渐开线。发现干涉界线一般有2条, 近齿面干涉界线存在于面齿轮内端附近, 大致沿齿高走向。近齿面干涉界点存在平凡解, 是干涉界线和啮合界线共轭线的交点, 位于传动副瞬时相对转动轴上。基于近齿面干涉界线, 建立了面齿轮无根切内径公式, 通过数值迭代可以获得内径准确值; 还导出了无根切内径估算公式, 便于设计中应用。

**关键词:**面齿轮; 曲率干涉; 啮合界线; 渐开线; 直齿轮; 根切; 非线性; 内径

**DOI:** 10. 11990/jheu. 202210027

**网络出版地址:** <https://link.cnki.net/kcms/detail/23.1390.U.20240308.1102.002>

**中图分类号:** TH132.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-7043(2024)04-0764-07

## Two types of boundary line of orthogonal face gear drives

ZHAO Yaping, LOU Haiqing

(School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** In order to establish the theory of two kinds of limit line is set forth for the orthogonal face gear drive. By solving the nonlinear equations, the numerical solutions of the limit lines are obtained. It is proved that both the meshing limit line and its conjugate line are all involute. Generally, the interference limit line has two branches, and one branch near the gear exists approximately at its inner end, roughly along the tooth height and slightly aslant. The interference limit point has a trivial solution, and the related limit point is the intersecting point of the limit line and the conjugate line of meshing limit line. The trivial limit point is on the instantaneous axis of the relative rotation of the gear pair. By means of the theory proposed, a method based numerical iteration to compute the exact inner radius is proposed for the face gear without undercutting. Meanwhile an approximate formula to estimate the non-undercutting inner radius is put forward for convenient design.

**Keywords:** face gear; curvature interference; meshing boundary line; involute; spur gear; undercutting; nonlinearity; inner radius

面齿轮传动源于“灯笼齿轮传动”<sup>[1]</sup>, 这是一种通过销齿啮合的拨挂齿轮副。现代正交面齿轮传动中, 小轮为渐开线圆柱直齿轮, 分度曲面是圆柱面; 大轮为端面直齿轮, 分度曲面是平面。在啮合传动的过程中, 分度圆柱面在分度平面上做滚动和滑动。作为大轮的端面直齿轮, 一般可用产形面与传动副中小轮齿面一致的刀具范成得到。按照机械传动的啮合理论<sup>[2-3]</sup>, 啮合界线是线共轭齿面偶  $[S_1, S_2]$  中, 主动轮齿面  $S_1$  瞬时接触线族的包络线, 决定了

主动轮齿面工作区的自然边界。通过对啮合界线进行深入系统的研究, 可以为确定传动副技术参数提供理论依据, 明确齿面参数的求解域, 从而形成传动副的科学设计方法。同为偏置传动的锥蜗杆传动、圆柱蜗杆传动的啮合界线研究<sup>[4-7]</sup>, 已经充分证实了上述论断。从产形面与切齿啮合的相对运动出发, 建立面齿轮齿面的奇点条件, 按传动副的不同技术参数, 研究齿宽系数、面齿轮内径的变化规律<sup>[8-11]</sup>。面齿轮内径取决于其根切特性, 但是按其提供的内径公式设计面齿轮, 往往不能切实保证面齿轮完全无根切<sup>[12]</sup>, 其他研究参见文献<sup>[13-16]</sup>。

本文通过研究啮合界线与曲率干涉界线得到了确定面齿轮内径的方法与计算公式。

收稿日期: 2022-10-20.

网络出版日期: 2024-03-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(52075083); 武汉科技大学冶金装备及其控制教育部重点实验室开放基金项目(MECOF2022B04, MECOF2023B01).

作者简介: 赵亚平, 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 赵亚平, E-mail: zhyp\_neu@163.com.

### 1 正交面齿轮副的齿面方程

如图 1 所示,建立动坐标系  $\sigma_1 \{O_1; i_1, j_1, k_1\}$  与小轮固连,原点  $O_1$  为小轮齿宽中点,  $k_1$  沿小轮的轴线方向。小轮齿面为渐开线柱面,按图 1 所示几何关系,利用圆向量函数<sup>[17]</sup>,可以写出小轮齿面  $S_1$  的方程为:

$$r_1 = r_b e_1(\theta) - r_b \theta g_1(\theta) + u k_1 \quad (1)$$

式中:  $u$  和  $\theta$  为  $S_1$  的曲纹坐标;  $u \in [-b_1/2, b_1/2]$ ,  $b_1$  为小轮的齿宽;  $r_b$  为小轮基圆半径。

从式(1)可求得偏导矢为:

$$r_{1u} = k_1, r_{1\theta} = r_b \theta e_1(\theta) \quad (2)$$

从式(2)可以计算出小轮齿面  $S_1$  的单位法向量  $n_1$ , 它指向小轮轮齿实体,  $n_1$  为:

$$n_1 = \frac{r_{1u} \times r_{1\theta}}{|r_{1u} \times r_{1\theta}|} = g_1(\theta) \quad (3)$$

图 2 中  $\sigma_{o1} \{O_1; i_{o1}, j_{o1}, k_{o1}\}$  和  $\sigma_{o2} \{O_2; i_{o2}, j_{o2}, k_{o2}\}$  为静系,  $k_{o2} \perp k_{o1}$ , 垂足为  $O_2$ , 单位矢量  $k_{o2}$  沿面齿轮轴线, 选定  $j_{o2} \parallel j_{o1}$ 。  $|O_2 O_1| = R_m, R_m$  为图 3 所示面齿轮中径。

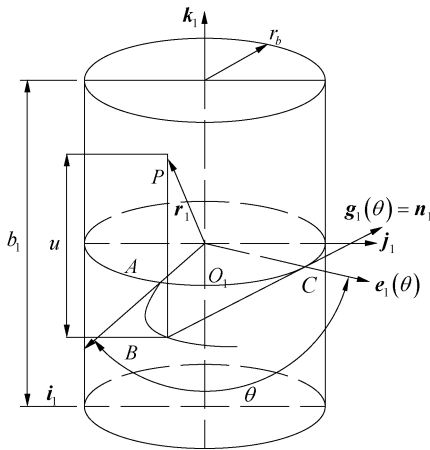


图 1 渐开线柱面形成机理示意

Fig. 1 Diagram to denote formation mechanism of involute cylinder surface

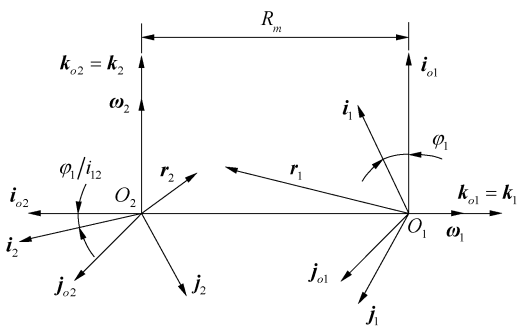


图 2 描述面齿轮副啮合的坐标系

Fig. 2 Coordinate systems to describe meshing of face gear pair

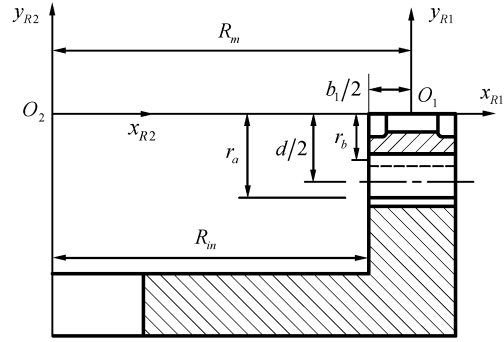


图 3 轴截面内的面齿轮副

Fig. 3 Face gear pair in axial section

传动副啮合过程中,小轮齿面在静系  $\sigma_{o1}$  中形成单参数渐开线柱面族  $\{S_1\}$ , 利用回转变换矩阵<sup>[3]</sup>,从式(1)可以得到曲面族  $\{S_1\}$  的方程为:

$$(r_1)_{o1} = R[k_{o1}, \varphi_1] r_1 = x_{o1} i_{o1} + y_{o1} j_{o1} + u k_{o1} \quad (4)$$

式中  $\varphi_1$  为小轮转角,而且,

$$\begin{cases} x_{o1} = r_b \cos(\theta + \varphi_1) + r_b \theta \sin(\theta + \varphi_1) \\ y_{o1} = r_b \sin(\theta + \varphi_1) - r_b \theta \cos(\theta + \varphi_1) \end{cases}$$

从式(3)可以得到曲面族  $\{S_1\}$  的单位法矢量为:

$$(n_1)_{o1} = R[k_{o1}, \varphi_1] (n_1)_1 = g_{o1}(\theta + \varphi_1) \quad (5)$$

取小轮角速度矢  $\omega_1 = k_{o1}$ , 则大轮角速度矢量  $\omega_2 = 1/i_{12} i_{o1}$ , 参看图 2,  $i_{12}$  为面齿轮副传动比,从而传动副相对角速度矢为:

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 = -i_{12}^{-1} i_{o1} + k_{o1} \quad (6)$$

根据齿轮啮合理论<sup>[3]</sup>,基于式(4)和式(6),面齿轮副的相对运动速度为:

$$V_{12} = -y_{o1} i_{o1} + \left(x_{o1} + \frac{u + R_m}{i_{12}}\right) j_{o1} - \frac{y_{o1}}{i_{12}} k_{o1} \quad (7)$$

从式(5)和式(7)得到正交面齿轮传动的啮合函数为:

$$\Phi = (n_1)_{o1} \cdot (V_{12})_{o1} = \frac{u + R_m}{i_{12}} \cos(\theta + \varphi_1) + r_b \quad (8)$$

式(8)对  $\varphi_1$  求偏导数,即得到啮合界线函数为:

$$\Phi_{\varphi_1}(u, \theta, \varphi_1) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = -\frac{u + R_m}{i_{12}} \sin(\theta + \varphi_1) \quad (9)$$

按图 2 所示的坐标变换关系,利用回转变换矩阵,从式(4)和式(8),在与面齿轮固连的动系  $\sigma_2 \{O_2; i_2, j_2, k_2\}$  中,可以得到面齿轮齿面  $S_2$  方程:

$$\begin{cases} r_2 = R \left[ k_2, -\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right] \left\{ R \left[ j_{o2}, -\frac{\pi}{2} \right] (r_1)_{o1} - R_m i_{o2} \right\} \\ \Phi(u, \theta, \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

从式(10)中的啮合方程  $\Phi = 0$  可以解出:

$$u = -\frac{i_{12}r_b}{\cos(\theta + \varphi_1)} - R_m \quad (11)$$

把式(11)代入式(10),利用圆向量函数与球向量函数<sup>[17]</sup>,齿面  $S_2$  方程(10)改写为:

$$\begin{aligned} r_2(\phi, \varphi_1) = & \frac{i_{12}r_b}{\cos \phi} e_2\left(-\frac{\varphi_1}{i_{12}}\right) + r_b m_2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}}, \phi\right) - \\ & r_b(\phi - \varphi_1) n_2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}}, \phi\right) \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\phi = \theta + \varphi_1$ 。

## 2 啮合界线

### 2.1 啮合界线的方程及其性质

根据啮合理论,式(8)和式(9)中令  $\Phi = \Phi_{\varphi_1} = 0$ , 可得到小轮齿面上 2 类界点<sup>[2]</sup>条件为:

$$\sin(\theta + \varphi_1) = 0 \quad (13)$$

$$\cos(\theta + \varphi_1) = -\frac{i_{12}r_b}{u + R_m} \quad (14)$$

利用三角关系,从式(13)、式(14)可以求出:

$$u^{(1)} = i_{12}r_b - R_m \quad (15)$$

$$u^{(2)} = -i_{12}r_b - R_m \quad (16)$$

为限制面齿轮的轮廓尺寸,一般取  $i_{12}r_b - R_m < 0$ , 因而  $u^{(1)} < 0$ 。又因从式(15)、式(16)可知  $u^{(2)} - u^{(1)} = -2i_{12}r_b < 0$ , 所以  $u^{(2)} < u^{(1)} < 0$ 。根据式(1)给出的对应小轮齿面范围的参数  $u$  的取值范围,可知  $u^{(2)}$  对应的啮合界线远离小轮齿面。

假设  $0 \leq \theta + \varphi_1 \leq 2\pi$ , 把式(15)代入式(14)可以解得:

$$\varphi_1 = \pi - \theta \quad (17)$$

式(1)中令  $u = u^{(1)}$ , 可以得到小轮齿面上啮合界线的方程:

$$r_1(\theta) = r_b e_1(\theta) - r_b \theta g_1(\theta) + (i_{12}r_b - R_m) k_1 \quad (18)$$

式(18)表明,正交面齿轮副的啮合界线,为小轮齿面的横向截形,是一段基圆半径为  $r_b$  的渐开线。建立小轮轴截面坐标系  $\{O_1; x_{R1}, y_{R1}\}$ , 如图 3 所示,横轴  $x_{R1}$  与小轮的轴线重合,纵轴  $y_{R1}$  沿小轮的径向,按照式(1),  $x_{R1} = u, y_{R1} = \pm r_b \sqrt{1 + \theta^2}$ 。

利用式(15),在坐标系  $\{O_1; x_{R1}, y_{R1}\}$  中,面齿轮副的啮合界线方程可以表示为:

$$x_{R1} = i_{12}r_b - R_m < 0, y_{R1} = \pm r_b \sqrt{1 + \theta^2} \quad (19)$$

式中  $x_{R1}$  为常数小轮轴截面内,啮合界线垂直于小轮轴线的直线,参看图 4。

为了确保啮合界线不进入小轮齿面,按照式(19)应使得  $x_{R1} \leq -b_1/2$ , 又因为  $R_m = R_{in} + b_1/2$ , 其中  $R_{in}$  为面齿轮内径:

$$R_{in} \geq i_{12}r_b \quad (20)$$

在啮合界线不进入小轮齿面这一前提下,面齿轮内径应满足的条件。在式(20)得到满足的条件下,  $i_{12}r_b - R_m < 0$ 。

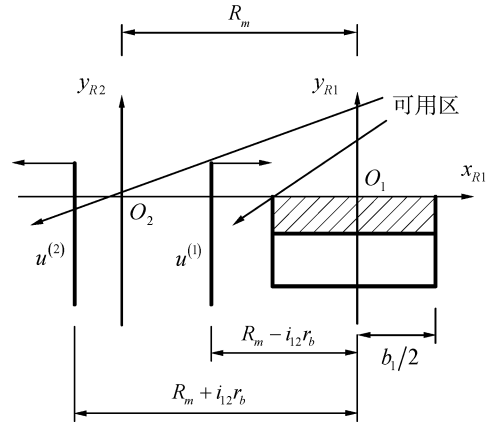


图 4 啮合界线和小轮齿面的相对位置关系

Fig. 4 Relative position relationship between meshing limit line and pinion tooth surface

为了保证啮合方程  $\Phi = 0$  有实数解,面齿轮齿面存在,从式(14)可以建立不等式:

$$|\cos(\theta + \varphi_1)| = \frac{i_{12}r_b}{|u + R_m|} \leq 1 \quad (21)$$

从而可以解得:

$$u \geq i_{12}r_b - R_m = u^{(1)} \text{ 或 } u \leq -i_{12}r_b - R_m = u^{(2)} \quad (22)$$

根据近齿面和远齿面啮合界线分析,在轴截面坐标系  $\{O_1; x_{R1}, y_{R1}\}$  中,绘制它们与小轮齿面的相对位置关系如图 4 所示。式(20)选定面齿轮内径  $R_{in}$ , 近齿面啮合界线一侧的共轭区可以覆盖整个小轮齿面,理论上小轮可以全齿长参与啮合。

### 2.2 啮合界线共轭线

将式(13)、式(14)代入式(12),同时考虑到  $u + R_m = i_{12}r_b$ , 即可得到面齿轮齿面上啮合界线共轭线的参数矢量方程为:

$$r_2(\psi) = i_{12}r_b e_2(\psi) - i_{12}r_b \left(\psi - \frac{i_{12} - 1}{i_{12}} \pi\right) g_2(\psi) - r_b k_2 \quad (23)$$

$$\text{式中 } \psi = \frac{\theta}{i_{12}} + \frac{i_{12} - 1}{i_{12}} \pi。$$

式(23)表明,在垂直于面齿轮轴线  $k_2$  的小轮基圆柱切平面内,啮合界线共轭线为一条渐开线,基圆半径为  $i_{12}r_b$ , 在此基圆上的起始角度为  $(i_{12} - 1)\pi/i_{12}$ 。

建立面齿轮轴截面坐标系  $\{O_2; x_{R2}, y_{R2}\}$ , 如图 3 所示,  $y_{R2}$  轴沿面齿轮轴线,  $x_{R2}$  沿面齿轮径向,根据面齿轮齿面方程(12)可以建立坐标转换关系:

$$\begin{cases} x_{R2} = \sqrt{(u + R_m)^2 + y_{o1}^2} \\ y_{R2} = x_{o1} \end{cases} \quad (24)$$

把式(17)代入式(4)中  $x_{o1}$  和  $y_{o1}$  的表达式,同时考虑到  $u + R_m = i_{12}r_b$ , 并利用式(24), 就可得到轴截面坐标系  $\{O_2; x_{R2}, y_{R2}\}$  中, 啮合界线共轭线的方程为:

$$x_{R2} = r_b \sqrt{i_{12}^2 + \theta^2}, y_{R2} = -r_b \quad (25)$$

式(25)表明, 在面齿轮轴截面内, 啮合界线共轭线垂是直于面齿轮轴线的直线。

### 3 曲率干涉界线

#### 3.1 曲率干涉界线方程

对式(12)求偏导矢, 可得:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} = \frac{i_{12}r_b \sin \phi}{\cos^2 \phi} \mathbf{e}_2 \left( -\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right) + r_b \theta \mathbf{m}_2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}}, \phi \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi_1} = \frac{-r_b}{\cos \phi} \mathbf{g}_2 \left( -\frac{\varphi_1}{i_{12}} \right) - \frac{r_b}{i_{12}} (\sin \phi - \theta \cos \phi) \mathbf{g}_2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}} \right) + r_b \mathbf{n}_2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}}, \phi \right) \quad (27)$$

式(26)和式(27)做叉积得到:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi_1} = \frac{-r_b^2}{i_{12} \cos^3 \phi} (\theta^2 \cos^4 \phi - \theta \sin \phi \cos^3 \phi - i_{12}^2 \sin^2 \phi) \mathbf{n}_2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{i_{12}}, \phi \right) \quad (28)$$

按照微分几何的理论, 面齿轮齿面  $S_2$  的奇点<sup>[17]</sup>条件为式(28)中叉积  $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi_1} = 0$ , 即为:

$$\theta^2 \cos^4 \phi - \theta \sin \phi \cos^3 \phi - i_{12}^2 \sin^2 \phi = 0 \quad (29)$$

式(29)是坐标平面  $(\theta, \phi)$  上  $S_2$  的曲率干涉界线方程。此处建立面齿轮齿面奇点条件, 较传统啮合理论中的方法<sup>[10]</sup>更简明。

因为式(29)是关于  $\theta$  的一元二次方程, 可得:

$$\theta(\phi) = \frac{\sin \phi}{2 \cos^2 \phi} (\cos \phi \pm \sqrt{\cos^2 \phi + 4i_{12}^2}) \quad (30)$$

把式(30)代入面齿轮齿面  $S_2$  方程(12), 就得到面齿轮副曲率干涉界线方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(\phi) = & \frac{i_{12}r_b}{\cos \phi} \mathbf{e}_2 \left( \frac{\theta(\phi) - \phi}{i_{12}} \right) + \\ & r_b \mathbf{m}_2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\theta(\phi) - \phi}{i_{12}}, \phi \right) - \\ & r_b \theta(\phi) \mathbf{n}_2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\theta(\phi) - \phi}{i_{12}}, \phi \right) \end{aligned} \quad (31)$$

式(30)、式(31)表明面齿轮齿面上, 曲率干涉界线一般存在2条。

#### 3.2 曲率干涉界点的计算原理

为了确定曲率干涉界点, 可以联立啮合方程  $\phi = 0$  和式(29), 建立非线性方程组:

$$\begin{cases} (u + R_m) \cos \phi + i_{12}r_b = 0 \\ \theta^2 \cos^4 \phi - \theta \sin \phi \cos^3 \phi - i_{12}^2 \sin^2 \phi = 0 \\ y_{R2} = x_{o1} = r_b \cos \phi + r_b \theta \sin \phi = -L_y \end{cases} \quad (32)$$

式中:  $-L_y$  为曲率干涉界点在面齿轮轴截面坐标系  $\{O_2; x_{R2}, y_{R2}\}$  中的坐标,  $L_y > 0$ 。在求解方程组(32)确定一类界点时,  $L_y$  须按面齿轮齿高先行给定。

方程组(32)中未知量为  $\theta, \phi$  和  $u$ 。当  $\sin \phi = 0$  时, 从式(32)可解得  $\cos \phi = -L_y/r_b$ , 故只能取定  $L_y = r_b$ , 从而  $\cos \phi = -1$ 。又因为  $\phi = \theta + \varphi_1 \in [0, 2\pi]$ , 所以在这种情况下,  $\phi = \pi$ , 如式(17)所示。将  $\sin \phi = 0$  和  $\cos \phi = -1$  代入式(32), 可以求得  $\theta = 0$ ; 将  $\cos \phi = -1$  代入式(32), 可以求得  $u = i_{12}r_b - R_m$ 。

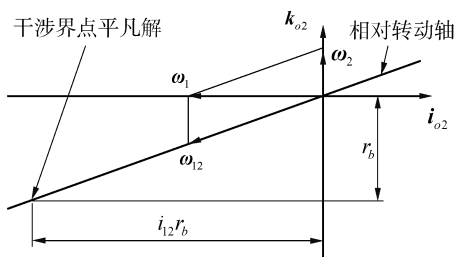


图5 相对转动轴与干涉界点平凡解

Fig.5 Axis of relative rotation and trivial limit point

以上实际上求得了非线性方程组(32)的一个平凡解:  $\theta = 0, \phi = \pi, u = i_{12}r_b - R_m$ 。据此, 通过式(24)和式(25)可验证, 此平凡干涉界点也位于啮合界线共轭线上, 是干涉界线和啮合界线共轭线的交点。平凡干涉界点的共轭点, 在小轮的基圆柱面上。因为基圆内无渐开线, 此点可作为干涉界线的起始点。

将  $\theta = 0, \phi = \pi, u = i_{12}r_b - R_m$  代入式(7), 可以计算出相应干涉界点处的相对速度  $\mathbf{V}_{12} = 0$ 。把上述平凡解代入式(31), 计算出平凡干涉界点在动系  $\sigma_2$  中的径矢, 经过坐标变换, 可以得到此点在静系  $\sigma_{o2}$  中的径矢为:

$$(\mathbf{r}_2^*)_{o2} = -i_{12}r_b \mathbf{i}_{o2} - r_b \mathbf{k}_{o2} \quad (33)$$

因为正交轴面齿轮副属相交轴传动, 小轮大轮间的相对运动, 为瞬时相对纯转动, 其相对转动轴在平面内  $\{O_2; \mathbf{i}_{o2}, \mathbf{k}_{o2}\}$  通过点  $O_2$ , 且沿相对角速度矢  $\boldsymbol{\omega}_{12}$  的方向, 参看图5。因此根据空间解析几何, 可在静系  $\sigma_{o2}$  中得出相对转动轴的方程为:

$$\frac{x_{o2}}{1} = \frac{y_{o2}}{0} = -\frac{i_{12}z_{o2}}{1} \quad (34)$$

式中作为分母的1, 0和1是瞬时转动轴所在直线方向矢量的分量, 其中的“0”仅表示方向矢量的分量为0, 并非以0做除数, 进行除法计算, 这样的表示在空间解析几何的文献中, 十分常见。

把式(33)中干涉界点平凡解在静系  $\sigma_{o_2}$  中的坐标代入式(34), 方程得到满足, 说明平凡干涉界点在相对转动轴上。

当  $\sin \phi \neq 0$  时, 从式(32)可以解出:

$$\theta = -\cos\phi + \frac{L_y}{r_b} / \sin\phi \quad (35)$$

把式(35)代入式(32)得到:

$$f(X) = \frac{L_y}{r_b} X^5 + \left( \frac{L_y^2}{r_b^2} - i_{12}^2 + 1 \right) X^4 + \frac{L_y}{r_b} X^3 + 2i_{12}^2 X^2 - i_{12}^2 = 0 \quad (36)$$

式中  $X = \cos \phi \in [-1, 1]$ 。

式(36)是关于  $X$  的一元五次代数方程, 用 Matlab 中的 roots 函数, 可以求得其全部根。选择在区间  $[-1, 1]$  的实根作为  $X$  的合理值。数值计算的经验表明, 这样的合理值一般有 2 个, 分别对 2 条干涉界线。

考虑到  $L_y > r_b$ , 所以式(35)中  $\cos \phi + L_y/r_b > 0$ , 因此为了在干涉界线上确保  $\theta > 0$ , 应取  $\sin \phi = -\sqrt{1 - X^2}$ 。

按照以上求出的  $\sin \phi$  和  $\cos \phi$ , 可以在区间  $[0, 2\pi]$  确定角度  $\phi$ , 再根据从式(35)求得的  $\theta$  角的值, 就能计算出干涉界点处小轮转角  $\varphi_1 = \phi - \theta$ 。另外, 从式(32)又可求出, 干涉界点处  $u = -i_{12}r_b/X - R_m$ 。如此得到全部 3 个未知量 ( $\theta, \varphi_1, u$ ) 后, 就确定了面齿轮副的一个干涉界点。变动  $L_y$  值, 就可以得

到一系列干涉界点, 把它们通过插值平滑连接, 便得到干涉界线。

### 4 干涉界线的数值结果

依照文献[12]确定表 1 中辅助角  $\alpha_0$  的值, 以便计算面齿轮外径。给定  $L_y$  值得算例 A、算例 B 如表 2 所示, 按本文 3.2 节所述方法, 取式(36)中  $X$  在 -1 附近的实根, 计算各干涉界点, 数值解结果亦见表 2。根据这些数值结果, 在面齿轮轴截面内  $\{O_2; x_{R2}, y_{R2}\}$  绘制出图 6 中干涉界线 I。干涉界线 II 对应  $X$  靠近 1 的实根, 干涉界线 I 上  $\phi$  是第三象限角, 干涉界线 II 上  $\phi$  是第四象限角。

表 1 正交面齿轮副的主要参数

序号	符号单位	计算依据	算例 A	算例 B
1	小轮齿数 $Z_1$	—	25	50
2	传动比 $i_{12}$	—	4	4
3	模数 $m/\text{mm}$	—	6	6
4	面齿轮齿数 $Z_2$	$Z_2 = i_{12}Z_1$	100	200
5	小轮分度圆直径 $d/\text{mm}$	$d = Z_1 m$	150	300
6	压力角 $\alpha/(\circ)$	—	20	
7	小轮基圆半径 $r_b/\text{mm}$	$r_b = d \cos \alpha / 2$	70.48	140.96
8	辅助角 $\alpha_0/(\circ)$	—	34.60	31.73
7	面齿轮外径 $R_{ex}/\text{mm}$	$R_{ex} = \frac{mZ_2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha_0}$	342.48	662.89

表 2 干涉界线 I 的数值结果 (算例 A)

Table 2 Numerical results of interference limit line I (Example A)

界点序号	$L_y/\text{mm}$	$X$	$\phi/(\circ)$	$\theta/(\circ)$	$\varphi_1/(\circ)$	$u/\text{mm}$
1	$r_b$	-1.000 0	180.000 0	0	180.000 0	35.503 0
2	$1.05r_b$	0.993 9	186.354 0	29.065 9	157.288 1	33.760 8
3	$1.1r_b$	0.987 8	188.948 2	41.319 6	147.628 6	32.030 0
4	$1.15r_b$	0.981 9	190.913 8	50.866 6	140.047 2	30.310 5
5	$1.2r_b$	0.976 1	192.550 5	59.034 8	133.515 7	28.602 2

图 6 中齿面位于干涉界线 I 和 II 之间, 既保证了齿面位于啮合界线可用一侧, 又避开了干涉界线, 还没有过分加大轮廓尺寸。这样就使得干涉界线 I 大致位于面齿轮内端附近, 干涉界线 II 大致位于其外端以外。2 条干涉界线都近似沿齿高走向。干涉界线 I 上点 1 得自方程组(32)的平凡解。图 6 中啮合界线共轭线按式(25)绘出, 反映出干涉界线 I 上点 1 是干涉界线 I 与啮合界线共轭线的交点。

干涉界线 I 实际上控制了面齿轮内径  $R_{in}$ , 使之不可过小, 否则面齿轮容易发生曲率干涉。由于受到面齿轮齿顶锐化的限制<sup>[8,12]</sup>, 面齿轮外径  $R_{ex}$  不可以过大, 因而干涉界线 II 通常远离面齿轮的齿面,

对其进一步的讨论从略。由此可见, 面齿轮发生曲率干涉的危险部位, 在于其内端齿根位置。

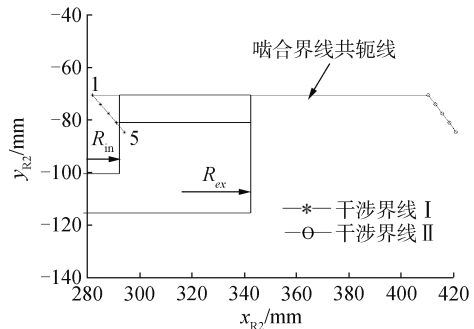


图 6 面齿轮轴截面内曲率干涉界线和啮合界线共轭线  
Fig. 6 Interference limit line and conjugate line of meshing limit line in face gear axial section

## 5 面齿轮无根切最小内径的确定

如前所述面齿轮曲率干涉的危险部位,在其内端齿根,因此可在式(36)中取定  $L_y = r_0 = r_a + c * m$ , 求得相应干涉界点,以此干涉界点在轴截面坐标系  $\{O_2; x_{R2}, y_{R2}\}$  中的横坐标  $x_{R2}$ , 为面齿轮内径。此处,  $r_a$  为小轮齿顶圆半径,  $c^*$  为小轮顶隙系数。这样就能保证干涉界线 I 完全不进入面齿轮齿面,如图6所示。

按上述思路,借助啮合方程  $\Phi = 0$ 、坐标转换关系(24)和式(36)可以建立关于  $(X, R_{in})$  的代数方程组:

$$\frac{r_0}{r_b} X^5 + \left( \frac{r_0^2}{r_b^2} - i_{12}^2 + 1 \right) X^4 + \frac{r_0}{r_b} X^3 + 2i_{12}^2 X^2 - i_{12}^2 = 0 \quad (37)$$

$$\frac{R_{in}^2 + r_0^2}{r_b^2} X^4 + 2 \frac{r_0}{r_b} X^3 - \left( \frac{R_{in}^2}{r_b^2} + i_{12}^2 - 1 \right) X^2 + i_{12}^2 = 0 \quad (38)$$

用 Matlab 中的 roots 函数,可以求得式(37)关于  $X$  的全部根,取其中大于-1且最接近于-1者,代入式(38),面齿轮内径  $R_{in}$  为:

$$R_{in} = r_b \sqrt{i_{12}^2 + \frac{\left( \frac{r_0}{r_b} X + 1 \right)^2}{1 - X^2}} \quad (39)$$

按式(36)的约定,式(37)中  $X = \cos \phi$ , 据此利用三角关系,可以把式(37)改写为:

$$i_{12}^2 \sin^4 \phi - X^3 \left( X + \frac{r_0}{r_b} \right) \sin^2 \phi - X^4 \left( X + \frac{r_0}{r_b} \right)^2 = 0 \quad (40)$$

式(40)是关于  $\sin \phi$  双二次方程,解之可得:

$$\sin^2 \phi = \frac{X^2}{2i_{12}^2} \left( X + \frac{r_0}{r_b} \right) \left( X + \sqrt{X^2 + 4i_{12}^2} \right) \quad (41)$$

利用式(41)和三角关系,就能把式(39)改为:

$$\frac{R_{in}^2}{r_b^2} = \frac{i_{12}^2}{X^2} + \frac{\left( \frac{r_0}{r_b} X + 1 \right)^2}{1 - X^2} = \frac{i_{12}^2}{X^2} + \frac{\left( \frac{r_0}{r_b} X + 1 \right)^2}{\sin^2 \phi} = \frac{i_{12}^2}{X^2} \left[ 1 + \frac{2 \left( \frac{r_0}{r_b} X + 1 \right)^2}{\left( X + \frac{r_0}{r_b} \right) \left( X + \sqrt{X^2 + 4i_{12}^2} \right)} \right] \quad (42)$$

基于干涉界点的计算经验可知:  $X = \cos \phi \approx -1$ , 参见表2。经此近似,从式(42)可得出内径  $R_{in}$  的近似计算公式为:

$$R_{in} = i_{12} r_b \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{1 + 4i_{12}^2} - 1} \left( \frac{r_0}{r_b} - 1 \right)} \quad (43)$$

从式(43)可知  $R_{in} > i_{12} r_b$ 。

按表1中2个算例的数据,从式(43)计算出无根切最小内径  $R_{in}$  的近似值;从式(39)求得无根切最小内径的准确值,所得结果列于表3。该表中数据表明,近似解与准确解接近,不过一般略小。绘制图6所用内径  $R_{in}$  即按本节所述准确法求得。

表3 面齿轮无根切最小内径数值结果

Table 3 Numerical results of non-undercutting minimum inner radius of face gear

算例	$R_{in}^*/\text{mm}$	$R_{in}/\text{mm}$	$\Delta R_{in}/\text{mm}$	$\delta/\%$
算例 A	288.64	292.34	3.70	1.27
算例 B	573.11	578.25	5.14	0.89

事实上,面齿轮内端齿根部为刀顶形成的过渡曲面,而非范成齿面,用式(39)算出的  $R_{in}$  准确值作为面齿轮内径,可以充分保证面齿轮无根切,但得到的结构稍嫌不够紧凑。

## 6 结论

1)通过建立的正交面齿轮传动啮合界线理论和曲率干涉界线理论,发现啮合界线是小轮齿面上的渐开线,其共轭线也是渐开线。

2)近齿面干涉界线存在于面齿轮齿的内端附近,基本沿齿高走向;近齿面干涉界线与啮合界线共轭线有一个交点,该点位于传动副相对转动轴上。

3)通过迭代求解,可获得内径准确值,导出的无根切最小内径估算公式便于设计中应用。

## 参考文献:

- [1] BUCKINGHAM E. Analytical mechanics of gears [M]. New York: McGraw-Hill Book Co., 1949.
- [2] 吴大任,骆家舜. 齿轮啮合理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [3] 董学朱. 齿轮啮合理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989.
- [4] ZHAO Yaping, ZHANG Xiao. Meshing limit line of conical worm pair[C]//European Conference on Mechanism Science. Cham: Springer, 2020: 247-255.
- [5] ZHAO Yaping. Meshing limit line of involute worm drive [C]//Proceedings of IFToMM World Congress 2019, Poland, 2019, 73: 1129-1138.
- [6] ZHAO Yaping, SUN Xiaodong. On meshing limit line of ZC1 worm pair[C]//Corves B, Wenger P, Hüsing M. European Conference on Mechanism Science. Cham: Springer, 2019: 292-298.
- [7] MENG Qingxiang, ZHAO Yaping, YANG Zaiyou. Meshing limit line of the conical surface enveloping conical worm pair[J]. Proceedings of the institution of mechanical engineers, part C: journal of mechanical engineering science, 2020, 234(2): 693-703.
- [8] (苏)李特文著. 卢贤占等译. 齿轮啮合原理: 第2版[M]. 2版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
- [9] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied the-

- ory[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [10] 朱如鹏, 高德平. 在面齿轮设计中避免根切和齿顶变尖的设计方法的研究[J]. 中国机械工程, 1999, 10(11): 1274-1276.
- ZHU Rupeng, GAO Deping. Study on the method of avoiding dedendum undercutting and addendum pointing in face gear design [J]. China mechanical engineering, 1999, 10(11): 1274-1276.
- [11] 李政民卿, 朱如鹏. 正交面齿轮齿廓的几何设计和根切研究[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2008, 36(2): 78-82.
- LI Zhengminqing, ZHU Rupeng. Investigation into geometrical design of tooth profile and undercut for orthogonal face gear[J]. Journal of South China university of technology (natural science edition), 2008, 36(2): 78-82.
- [12] RADZEVICH S P, DUDLEY D W. Dudley's handbook of practical gear design and manufacture[M]. 3rd ed.
- [13] 付学中, 方宗德, 李建华, 等. 面齿轮副小轮拓扑修形设计及啮合性能分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(9): 1281-1286.
- FU Xuezhong, FANG Zongde, LI Jianhua, et al. Design of topological shape modification of auxiliary pinion of face gears and analysis of meshing performance[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2016, 37(9): 1281-1286.
- [14] 赵新辉, 孙永国, 于广滨. 齿根过渡曲面对正交面齿轮弯曲强度影响[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2018, 39(6): 1066-1072.
- ZHAO Xinhui, SUN Yongguo, YU Guangbin. The effect of tooth root transition surface on bending strength of orthogonal face gear [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2018, 39(6): 1066-1072.
- [15] 付学中, 方宗德, 向龙, 等. 偏置面齿轮安装误差容差性与敏感性[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2018, 39(7): 1227-1232.
- FU Xuezhong, FANG Zongde, XIANG Long, et al. Assembly errors tolerance and sensitivity of offset face gears [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2018, 39(7): 1227-1232.
- [16] 彭先龙, 徐琪超, 侯祥颖, 等. 安装误差对面齿轮承载传动性能的影响[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2020, 41(12): 1861-1867.
- PENG Xianlong, XU Qichao, HOU Xiangying, et al. Finite element analysis of gear bearing transmission performance influenced by misalignment [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2020, 41(12): 1861-1867.
- [17] 赵亚平. 曲线与曲面的工程微分几何学[M]. 北京: 科学出版社, 2023.

### 本文引用格式:

- 赵亚平, 娄海青. 正交面齿轮传动的两类界线[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2024, 45(4): 764-770.
- ZHAO Yaping, LOU Haiqing. Two types of boundary line of orthogonal face gear drives[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2024, 45(4): 764-770.